Контрольная работа 1

Примеры решения задач

Задача 1

Решение задач нелинейного программирования методом Лагранжа

Пример.

Целевая функция имеет вид $z = x^2 + 2y^2$.

Найти значения переменных, при которых достигается экстремум целевой функции, при условии, что переменные связаны соотношением: $3x + 2y = 11$.

Решение.

Составим функцию Лагранжа:

$L = x^2 + 2y^2 + \lambda(3x + 2y - 11)$.

Найдем стационарные точки функции Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + 3\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 4y + 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 3x + 2y - 11 = 0 \end{cases}$$

Из данной системы получаем: $\lambda = -2, x = 3, y = 1$.

Точка (3;1) - точка условного экстремума функции $z = x^2 + 2y^2$.

Ответ: x=3, y=1, целевая функция имеет минимум z=11 в этой точке.

Задача 2

Задача об оптимальном распределении инвестиций

Пример.

Распределить T=40 ден. ед. по трем предприятиям с целью получения максимальной суммарной прибыли. Прибыль с предприятий задается табл. 1.

Таблица 1

X	g_1	g_2	g_3
0	0	0	0
10	17	21	19

20	23	25	24
30	34	30	29
40	.40	37	32

Решение.

I этап. Условная оптимизация

1-й шаг. k=3. Предполагаем, что все средства 40 ден. ед. переданы на инвестирование третьего предприятия. В этом случае максимальная прибыль составит $F_3(C_3)=32$, см. табл. 2.

Таблица 2

C_3	X_3					F3($C_з$)	X^*_3
	0	10	20	30	40		
0	0	—	—	—	—	0	*0*
10	—	19	—	—	—	19	10
20	—	—	24		—	24	20
30	—	—	—	29	—	29	30
40	—	—	—	—	32	32	40

2-й шаг. k =2, Определяем оптимальную стратегию инвестирования во второе и третье предприятия. При этом рекуррентное соотношение Беллмана будет иметь вид

$$F_2(C_2) = \max \{g_2(x_2) + F_3(C_2-x_2)\}$$

На его основе рассчитываются данные табл.3.

Таблица 3

C_2		X_2				$F_2(C_2)$
	0	10	20	30	40	
0	0+0	—	—	—	—	0
10	0+19	21+0	—	—	—	21
20	0+24	21+19	25+0	—	—	40
30	0+29	21+24	25+9	30+0	—	45
40	0+32	21+29	25+24	30+19	37+0	50

3-й шаг. k=1. Определяем оптимальную стратегию инвестирования в первое и остальные предприятия. При этом рекуррентное соотношение Беллмана будет иметь вид

$$F_1(C_1) = \max \{g_1(x_1) + F_2C_1\text{-}x_1)\}$$

На его основе находятся данные табл. 4.

Таблица 4

C_1	X_1					$F_1(C_1)$	X^*_1
	0	10	20	30	40		
0	0+0	—	—	—	—	0	*0*
10	0+21	17+0	—	—	—	21	0
20	0+40	17+21	23+0	—	—	40	0
30	0+45	17+40	23+21	34+0	—	57	10
40	0+50	17+45	23+40	34+21	40+0	63	20

II этап. Безусловная оптимизация

1-й шаг. По данным табл. 3.4 максимальный доход при распределении 40 ден. ед. между тремя предприятиями составляет $F_1(5)$ =63. При этом первому предприятию нужно выделить x_1 = 20 ден. ед.

2-й шаг. Определяем величину оставшихся денежных средств, ^ приходящуюся на долю второго и третьего предприятий:

$C_2=C_1-x^*_1=40-20=20$.

По данным табл. 3.3 находим, что оптимальный вариант распределения денежных средств размером 20 ден. ед. между вторым и третьим предприятиями составляет $F_2(3)$ = 40 ден. ед. при выделении второму предприятию x_2= 10 ден. ед.

3-й шаг. Определяем величину оставшихся денежных средств, приходящуюся на долю третьего предприятия:

$C_3=C_2-x^*_2$= 20 - 10 = 10 ден. ед.

Из табл. 3.2 находим $F_3(2) = 19$ и $x^*_3 = 10$ ден. ед. Таким образом, оптимальный план инвестирования предприятий $X^* = (20, 10, 10)$, обеспечивающий максимальный доход, равен

$F(40) = g_1(20) + g_2(10) + g_3(10) = 23 + 21 + 19 = 63$ ден. ед.

<u>Задача 3</u>

Построение производственной функции Кобба-Дугласа.

<u>Пример.</u>

Рассмотрим некоторое производство, в котором один работник производит в течение года продукции на 1 млн. руб. Численность работников составляет 1000 человек. Основные фонды оцениваются в 10 млрд. руб. Известно также, что для увеличения выпуска продукции на 3% требуется увеличить стоимость фондов на 6% или численность работников на 9%. Допустим, что данное производство описывается с помощью функции ПФКД.

Требуется построить для данного предприятия производственную функцию, определив коэффициенты эластичности.

Решение.

Построим производственную функцию Кобба-Дугласа:

$$y = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

Поскольку коэффициенты α и β имеют смысл коэффициентов эластичности, то после их определения, нам будут известны коэффициенты ПФКД.

Обозначим для простоты $K = x_1$ – затраченный капитал, $L = x_2$ –труд.

По условиям задачи затраченный капитал $x_1 = 10000000000$ руб. $=10^{10}$ руб., труд $x_2 = 1000$ чел. Средняя производительность труда $Z=y/x_2= 1000000$ руб., следовательно, объем произведенной продукции в стоимостном выражении $y = x_2 \cdot Z = 1000 \cdot 1000000 = 1000000000$ руб. $= 10^9$ руб.

Запишем ПФКД в относительных приращениях:

$$\frac{\Delta y}{y} \approx \alpha \cdot \frac{\Delta x_1}{x_1} + \beta \cdot \frac{\Delta x_2}{x_2}$$

Где $\frac{\Delta y}{y}$ - прирост объема продукции;

$\frac{\Delta x_1}{x_1}$ - прирост фондов;

$\frac{\Delta x_2}{x_2}$ - прирост трудовых ресурсов.

Из условий задачи для увеличения выпуска на 3%, то есть $\frac{\Delta y}{y} = 0.03$ следует увеличить стоимость фондов на 6%, то есть $\frac{\Delta x_1}{x_1} = 0.06$, прирост трудовых ресурсов $\frac{\Delta x_2}{x_2}$ равен 0. Уравнение примет вид:

$$0.03 = \alpha \cdot 0.06 + \beta \cdot 0.$$

Этого же прироста можно достичь, если увеличить численность работников на 9%, то есть $\frac{\Delta x_2}{x_2} = 0.09$. Уравнение примет вид:

$$0.03 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0.09.$$

Отсюда можно найти коэффициенты эластичности, или, что то же самое, коэффициенты модели ПФКД.

$\alpha=1/2$, $\beta=1/3$.

$\alpha + \beta = 5/6$.

ПФКД, учитывая, что затраченный капитал $K = x_1$, труд $L = x_2$, примет вид:

$$y = AK^{1/2}L^{1/3}$$

Найдем теперь коэффициент A:

$$A = \frac{y}{x_1^{1/2} x_2^{1/3}} = \frac{10^9}{\sqrt{10^{10}}\sqrt[3]{1000}} = 1000.$$

Тогда производственная функция примет вид:

$$y = 1000 \cdot K^{1/2}L^{1/3}.$$

Варианты индивидуальных заданий

Контрольная работа выполняется по вариантам. Выберите вариант в соответствии с первой буквой Вашей фамилии:

Вариант 1 – для студентов (фамилии с **А** до **Д**)
Вариант 2 – для студентов (фамилии с **Е** до **К**)
Вариант 3 – для студентов (фамилии с **Л** до **Р**)
Вариант 4 – для студентов (фамилии с **С** до **Ц**)
Вариант 5 – для студентов (фамилии с **Ч** до **Я**)

Вариант 1

Ситуация 1

Определить методом множителей Лагранжа условные экстремумы функций

$Z = x^2+y^2$ при условии $x+y=1$

Ситуация 2

Распределить T=100 тыс .ден.ед. по четырем предприятиям с целью получения максимальной суммарной прибыли. Значения прироста продукции в зависимости от вложенных средств заданы таблицей.

X	g_1	g_2	g_3	g_4
20	16	14	15	15
40	30	32	36	25
60	49	50	45	22
80	51	48	57	36
100	72	60	70	51

Ситуация 3

Рассмотрим некоторое производство, которое описывается с помощью функции ПФКД. Основные фонды оцениваются в x_1 руб., численность работников составляет x_2 человек. Средняя производительность труда $z=y/x_2$ руб. Известно также, что для увеличения выпуска продукции на Δy требуется увеличить стоимость фондов на Δx_1 или численность работников на Δx_2.

Требуется построить для данного предприятия производственную функцию, определив коэффициенты эластичности.

x_1= 6,4 млн. руб.

x_2= 400 чел.

z=8000 руб.

Δy = 5%

Δx_1=10%

Δx_2=20%

Вариант 2

Ситуация 1

Определить методом множителей Лагранжа условные экстремумы функций

$Z= 3x^2+2y^2-x+1$ при условии $x^2+y^2 =4$

Ситуация 2

Распределить T=100 тыс .ден.ед. по четырем предприятиям с целью получения максимальной суммарной прибыли. Значения прироста продукции в зависимости от вложенных средств заданы таблицей.

X	g_1	g_2	g_3	g_4
20	19	14	20	25
40	36	32	36	53
60	51	52	47	66
80	72	61	72	70
100	81	79	80	84

Ситуация 3

Рассмотрим некоторое производство, которое описывается с помощью функции ПФКД. Основные фонды оцениваются в x_1 руб., численность работников составляет x_2 человек. Средняя производительность труда $z=y/x_2$ руб. Известно также, что для увеличения выпуска продукции на Δy требуется увеличить стоимость фондов на Δx_1 или численность работников на Δx_2.

Требуется построить для данного предприятия производственную функцию, определив коэффициенты эластичности.

x_1= 50 млрд. руб.

x_2= 5000 чел..

z=50000 руб.

Δy = 2%

Δx_1=4%

Δx_2=8%

Вариант 3

Ситуация 1

Определить методом множителей Лагранжа условные экстремумы функций

$Z = x^2 - y^2$ при условии x-y=4

Ситуация 2

Распределить T=100 тыс .ден.ед. по четырем предприятиям с целью получения максимальной суммарной прибыли. Значения прироста продукции в зависимости от вложенных средств заданы таблицей.

X	g_1	g_2	g_3	g_4
20	10	14	14	19
40	16	14	15	15
60	30	32	36	25
80	45	43	47	36
100	60	50	55	53

Ситуация 3

Рассмотрим некоторое производство, которое описывается с помощью функции ПФКД. Основные фонды оцениваются в x_1 руб., численность работников составляет x_2 человек. Средняя производительность труда $z=y/x_2$ руб. Известно также, что для увеличения выпуска продукции на Δy требуется увеличить стоимость фондов на Δx_1 или численность работников на Δx_2.

Требуется построить для данного предприятия производственную функцию, определив коэффициенты эластичности.

x_1= 25 млрд. руб.

x_2= 10000 чел.

z=50000 руб.

Δy = 2%

Δx_1=4%

Δx_2=8%

Вариант 4

Ситуация 1

Определить методом множителей Лагранжа условные экстремумы функций

$Z= x^2-y^2$ при условии x+y=6

Ситуация 2

Распределить Т=100 тыс .ден.ед. по четырем предприятиям с целью получения максимальной суммарной прибыли. Значения прироста продукции в зависимости от вложенных средств заданы таблицей.

X	g_1	g_2	g_3	g_4
20	14	17	22	20
40	26	20	21	33
60	35	32	37	46
80	52	61	67	30
100	61	72	58	42

Ситуация 3

Рассмотрим некоторое производство, которое описывается с помощью функции ПФКД. Основные фонды оцениваются в x_1 руб., численность работников составляет x_2 человек. Средняя производительность труда $z=y/x_2$ руб. Известно также, что для увеличения выпуска продукции на Δy требуется увеличить стоимость фондов на Δx_1 или численность работников на Δx_2.

Требуется построить для данного предприятия производственную функцию, определив коэффициенты эластичности.

x_1= 3,2 млн. руб.

x_2= 800 чел.

z=8000 руб.

Δy = 5%

Δx_1=10%

Δx_2=20%

Вариант 5

Ситуация 1

Определить методом множителей Лагранжа условные экстремумы функций

$Z= 4x^2+4y^2$ при условии x+y=2

Ситуация 2

Распределить T=100 тыс .ден.ед. по четырем предприятиям с целью получения максимальной суммарной прибыли. Значения прироста продукции в зависимости от вложенных средств заданы таблицей.

X	g_1	g_2	g_3	g_4
20	42	40	25	24
40	34	52	36	45
60	47	50	46	32
80	51	48	57	36
100	62	60	67	54

Ситуация 3

Рассмотрим некоторое производство, которое описывается с помощью функции ПФКД. Основные фонды оцениваются в x_1 руб., численность работников составляет x_2 человек. Средняя производительность труда $z=y/x_2$ руб. Известно также, что для увеличения выпуска продукции на Δy требуется увеличить стоимость фондов на Δx_1 или численность работников на Δx_2.

Требуется построить для данного предприятия производственную функцию, определив коэффициенты эластичности.

x_1= 50 млрд. руб.

x_2= 10000 чел.

z=25000 руб.

Δy = 2%

Δx_1=3%

Δx_2=6%